“皖南八校”2017 届高三第二次联考·数学(理科)
参考答案、解析及评分细则

1.C　2.B　3.C　4.B　5.A　6.C　7.A　8.D　9.A　10.D　11.B　12.D

13.2　14.12π　15.$1-\frac{2}{e}$　16.$4032b-2016a$

17.解:(Ⅰ)因为 $a^2+b^2-c^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}S$,所以 $2ab\cos C=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}\times ab\sin C$ ………… 3 分

化简得:$\tan C=\sqrt{3}$,又∵$0<C<\pi$,∴$C=\frac{\pi}{3}$ ………… 6 分

(Ⅱ)∵$C=\frac{\pi}{3}$,$c=\sqrt{3}$,∴$a^2+b^2-ab=3$,∴$(a+b)^2-3ab=3$　① ………… 8 分

又∵$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $ab=2$　② ………… 10 分

联立①②可得$(a+b)^2=9$,又∵$a+b>0$,∴$a+b=3$ ………… 12 分

18.解:(Ⅰ)记男生四关都闯过为事件 A,则

$P(A)=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. ………… 4 分

(Ⅱ)记女生四关都闯过为事件 B,则

$P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$, ………… 5 分

因为 $P(\xi=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{64}{225}$, ………… 6 分

$P(\xi=1)=C_2^1\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^2+C_2^1\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{96}{225}$, ………… 7 分

$P(\xi=2)=C_2^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2+C_2^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+C_2^1\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{52}{225}$, ………… 8 分

$P(\xi=3)=C_2^1\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^2+C_2^1\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{12}{225}$, ………… 9 分

$P(\xi=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{225}$. ………… 10 分

所以 ξ 的分布列如下:

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{64}{225}$	$\frac{96}{225}$	$\frac{52}{225}$	$\frac{12}{225}$	$\frac{1}{225}$

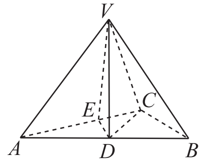
$E(\xi)=0\times\frac{64}{225}+1\times\frac{96}{225}+2\times\frac{52}{225}+3\times\frac{12}{225}+4\times\frac{1}{225}=\frac{240}{225}=\frac{16}{15}$. ………… 12 分

19.(Ⅰ)证明:$VB=2$,$VC=\sqrt{3}$,$BC=1\Rightarrow BC\perp VC$,

$VD\perp$平面 $ABC\Rightarrow VD\perp BC$,

$VD\cap VC=V$,∴$BC\perp$平面 $VCD\Rightarrow DC\perp BC$. ………… 5 分

(Ⅱ)解：(法一)作 $DE\perp AC$ 垂足为 E，连接 VE，



则$\angle VED$ 为二面角 $V-AC-B$ 的平面角，…………………………………… 7 分

在$\triangle BCD$ 中，$\angle DBC=45°$，$DC\perp BC$，$BC=1$，

$\therefore CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$\angle BDC=45°$，

在$\triangle ADC$ 中，$\angle ADC=135°$，$AD=AB-BD=\sqrt{2}$，

$\therefore AC=\sqrt{AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos 135°}=\sqrt{5}$，

$\therefore DE=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，又 $VD\perp$平面 ABC，$\therefore VD\perp CD$，又 $VC=\sqrt{3}$，$\therefore VD=\sqrt{2}$，

$\therefore VE=\dfrac{\sqrt{55}}{5}\Rightarrow\cos\angle VED=\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. ………………………………………………………………………… 12 分

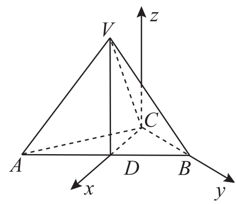
(法二)在$\triangle BCD$ 中，$\angle DBC=45°$，$DC\perp BC$，$BC=1$，

$\therefore CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$\angle BDC=45°$，

在$\triangle ADC$ 中，$\angle ADC=135°$，$AD=AB-BD=\sqrt{2}$，

又 $VD\perp$平面 ABC，$\therefore VD\perp CD$，又 $VC=\sqrt{3}$，$\therefore VD=\sqrt{2}$，

如图建立直角坐标系，



$D(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$A(2,-1,0)$，$V(1,0,\sqrt{2})$，

平面 ABC 的法向量为$\boldsymbol{e}_1=(0,0,1)$，

平面 VAC 的法向量为$\boldsymbol{e}_2=(-\sqrt{2},-2\sqrt{2},1)$，

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1||\boldsymbol{e}_2|}=\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. ………………………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(Ⅰ)$k_{AP}\cdot k_{BP}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4},\\ a=2,\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=1$

椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)设直线 MN 的方程为 $y=kx+t$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

$\begin{cases}y=kx+t,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}\Rightarrow(4k^2+1)x^2+8ktx+4t^2-4=0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{8kt}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4t^2-4}{4k^2+1}$，…………………………………………………………………… 6 分

$k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow 4y_1y_2+x_1x_2=0\Rightarrow 4(kx_1+t)(kx_2+t)+x_1x_2=0$，

$(4k^2+1)x_1x_2+4kt(x_1+x_2)+4t^2=0$，

$(4k^2+1)\left(\dfrac{4t^2-4}{4k^2+1}\right)-4kt\dfrac{8kt}{4k^2+1}+4t^2=0\Rightarrow 2t^2-4k^2=1$，…………………………………… 8 分

$|MN|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(\frac{8kt}{4k^2+1}\right)^2-4\frac{4t^2-4}{4k^2+1}\right]}=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{k^2+1}{4k^2+1}}$, ………………………………………… 10 分

$d=\frac{|t|}{\sqrt{k^2+1}}$, $S=\sqrt{2}\sqrt{\frac{k^2+1}{4k^2+1}}\frac{|t|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}\times\frac{|t|}{\sqrt{2t^2}}=1$.

∴△OMN 的面积为定值 1. ………………………………………………………… 12 分

21.(Ⅰ)解：$f(x)=x\ln x+a$ 的导数为 $f'(x)=\ln x+1(x>0)$， ………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{e}$，

x	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	减函数	极小值	增函数

所以 $y_{\min}=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}+a$， ………………………………………………………… 3 分

$f(x)>0$ 恒成立，$y_{\min}>0$，即 $y_{\min}=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}+a>0$，所以 $a>\frac{1}{e}$. ……………………………… 4 分

(Ⅱ)证明：$f(x)=x\ln x+a$ 的导数为 $f'(x)=\ln x+1(x>0)$，

易知 $f'(x)=\ln x+1$ 在$(0,+\infty)$为增函数.

欲证明$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$，

从图象分析可先证$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<f'(x)<\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$， ……………………………… 6 分

先证明$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<f'(x)=\ln x+1$，$0<x_1<x$

即证：$f(x)-f(x_1)-(x-x_1)(\ln x+1)<0$

设 $F(x)=f(x)-f(x_1)-(x-x_1)(\ln x+1)$，$0<x_1<x<x_2$，

$F'(x)=f'(x)-(\ln x+1)-\frac{x-x_1}{x}=(\ln x+1)-(\ln x+1)-\left(1-\frac{x_1}{x}\right)=\frac{x_1}{x}-1<0$，

所以 $F(x)=f(x)-f(x_1)-(x-x_1)(\ln x+1)$在$(x_1,x_2)$内为减函数，

所以 $F(x)<F(x_1)=0$，故$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\ln x+1$ 对于 $\forall x\in(x_1,x_2)$成立，

欲证 $\ln x+1<\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$即证：$f(x)-f(x_2)-(x-x_2)(\ln x+1)<0$，

令 $G(x)=f(x)-f(x_2)-(x-x_2)(\ln x+1)$，$0<x_1<x<x_2$，

$G'(x)=f'(x)-(\ln x+1)-\frac{x-x_2}{x}=(\ln x+1)-(\ln x+1)-\left(1-\frac{x_2}{x}\right)=\frac{x_2}{x}-1>0$，

所以 $G(x)=f(x)-f(x_2)-(x-x_2)(\ln x+1)$在$(x_1,x_2)$内为增函数，

$G(x)<G(x_2)=0$ 故 $\ln x+1<\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$成立， ……………………………………… 11 分

综上：对 $\forall x\in(x_1,x_2)$，不等式$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$恒成立. ……………………… 12 分

22. 解：(Ⅰ) C_2 是圆，C_2 的极坐标方程 $\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0$，

化为普通方程：$x^2+y^2-2x-3=0$ 即：$(x-1)^2+y^2=4$. …………………………………………………… 4 分

(Ⅱ) P 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$，平面直角坐标为 $(1,1)$，在直线 C_1 上，

将 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)

代入 $x^2+y^2-2x-3=0$ 中得：$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)-3=0$

化简得：$t^2+\sqrt{2}t-3=0$ 设两根分别为 t_1,t_2，

由韦达定理知：$\begin{cases}t_1+t_2=-\sqrt{2},\\ t_1\cdot t_2=-3,\end{cases}$

所以 AB 的长 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{2+12}=\sqrt{14}$，………………………………… 8 分

定点 P 到 A，B 两点的距离之积 $|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=3$. ……………………………………………… 10 分

23. 解：(Ⅰ) $f(x)=|x-1|+|2x+4|=\begin{cases}-3x-3, x\leqslant -2,\\ x+5, -2<x\leqslant 1,\\ 3x+3, x>1.\end{cases}$

所以：当 $x\leqslant-2$ 时，$y\in[3,+\infty)$；当 $-2<x\leqslant1$ 时，$y\in(3,6]$；当 $x>1$ 时，$y\in(6,+\infty)$.

综上，$y=f(x)$ 的最小值是 3. ………………………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ) $f(x)=|x-1|+|2x+4|$，

令 $g(x)=f(x)-6=\begin{cases}-3x-9, x\leqslant -2,\\ x-1, -2<x\leqslant 1,\\ 3x-3, x>1,\end{cases}$

① $\begin{cases}x\leqslant -2,\\ |-3x-9|\leqslant 1,\end{cases}$ 解得：$x\in\left[-\frac{10}{3},-\frac{8}{3}\right]$，

② $\begin{cases}-2<x\leqslant 1,\\ |x-1|\leqslant 1,\end{cases}$ 解得：$x\in[0,1]$，

③ $\begin{cases}x>1,\\ |3x-3|\leqslant 1,\end{cases}$ 解得：$x\in\left(1,\frac{4}{3}\right]$，

综上，不等式 $|f(x)-6|\leqslant1$ 的解集为：$\left[-\frac{10}{3},-\frac{8}{3}\right]\cup[0,1]\cup\left(1,\frac{4}{3}\right]=\left[-\frac{10}{3},-\frac{8}{3}\right]\cup\left[0,\frac{4}{3}\right]$. ……

…… 10 分